1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

▶ Teoria a p

Gli angoli e la loro misura

Dai gradi sessagesimali ai gradi sessadecimali

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Esprimiamo 25° 32′ 40″ in forma sessadecimale.

Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$32' = \left(32 \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ}.$$

Poiché $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$40'' = \left(40 \cdot \frac{1}{3600}\right)^{\circ}.$$

Trasformiamo la misura:

$$25°\,32'\,40'' = 25° + \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{40}{3600}\right)^{\circ} =$$
$$= 25° + 0{,}5\bar{3}° + 0{,}0\bar{1}° \simeq 25{,}54°.$$

La trasformazione richiesta è la seguente:

$$25°\,32'\,40'' \simeq 25{,}54°.$$

Esprimi in forma sessadecimale le seguenti misure di angoli.

2 0° 59′ 59″; 0° 30′. [1°; 0,5°]

3 1° 59′ 30″; 2° 40″. [1,99°; 2,01°]

4 20° 30′; 60° 20′. [20,5°; 60,3°]

5 15° 30′ 30″; 30° 30′ 30″. [15,5°;

6 44° 59′ 32″; 45° 59′ 60″. [44,99

7 92° 20′ 36″; 140° 26′ 55″. [92,34°; 1

8 67° 20′ 30″

9 59° 30′ 30″

10 80° 59′ 60″

11 22° 60′ 3600″

12 62° 25′ 40″

13 88° 38′ 28″

Dai gradi sessadecimali ai gradi sessagesimali

14 **ESERCIZIO GUIDA**

Trasformiamo 28,07° (forma sessadecimale) in gradi, primi e secondi.

Possiamo scrivere $28{,}07° = \boxed{28°} + 0{,}07°$. Trasformiamo 0,07° in primi, moltiplicando 0,07 per 60 (poiché $1° = 60'$):

$$0{,}07° = (0{,}07 \cdot 60)' = 4{,}2'.$$

Scriviamo $4{,}2' = \boxed{4'} + 0{,}2'$.

Trasformiamo 0,2′ in secondi, moltiplicando 0,2 per 60 (poiché $1' = 60''$):

$$0{,}2' = (0{,}2 \cdot 60)'' = \boxed{12''}.$$

Pertanto:

$$28{,}07° = 28°\,4'\,12''.$$

Esprimi in gradi, primi e secondi le seguenti misure di angoli, espresse in forma sessadecimale (arrotondando eventualmente i secondi).

15 2,234° [2° 14′ 2″]
18 1,567° [1° 34′ 1″]
21 90,5° [90° 30′]
16 22,52° [22° 31′ 12″]
19 90,05° [90° 3′]
22 60,46° [60° 27′ 36″]
17 120,360° [120° 21′ 36″]
20 25,251° [25° 15′ 4″]
23 100,252° [100° 15′ 7″]

24 61,39°; 28,3°.
26 45,72°; 89,53°.
25 120,67°; 36,02°.
27 14,47°; 47,15°.

Le operazioni fra angoli espressi in gradi

28 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo la seguente sottrazione.

90° − 32° 46′ 22″.

Per poter eseguire la sottrazione, scriviamo 90° in termini di primi e secondi.

Poiché 1° = 60′, possiamo scrivere:

90° = 89° 60′.

Poiché 1′ = 60″, possiamo scrivere:

90° = 89° 59′ 60″.

Ora è possibile eseguire la sottrazione in colonna, fra gradi, primi e secondi:

89° 59′ 60″ −
32° 46′ 22″ =
57° 13′ 38″

Esegui le seguenti operazioni fra le misure di angoli.

29 15° 32′ 52″ + 2° 12′ 8″ [17° 45′]
30 185° 2′ + 6° 59′ 12″ [192° 1′ 12″]
31 27° 2′ 3″ + 42° 12′ 56″ + 1° 2′ 4″ [70° 17′ 3″]
32 102° 50′ 18″ + 3° 9′ 42″ [106°]
33 180° − 28° 30′ 58″ [151° 29′ 2″]
34 270° − 120° 29′ 32″ [149° 30′ 28″]
35 360° − 322° 40′ 50″ [37° 19′ 10″]
36 90° − 82° 48′ 32″ [7° 11′ 28″]
37 26° − 1° 1′ 1″ [24° 58′ 59″]
38 18° 30′ 15″ · 2 [37° 0′ 30″]

Dai gradi sessagesimali ai radianti e viceversa

39 **COMPLETA** la seguente tabella scrivendo la misura mancante, in gradi o in radianti.

Gradi	90°	0°	....	180°	....	30°	....	270°	....	....
Radianti	....	....	$\frac{\pi}{3}$	....	$\frac{3}{4}\pi$	....	$\frac{2}{3}\pi$	....	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$

Trasforma in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi sessagesimali.

40 15°, 36°, 210°, 300°. $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{5}; \frac{7}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi\right]$

41 16°, 27°, 102°, 315°. [0,28; 0,47; 1,78; 5,50]

42 25°, 35°, 72°, 155°. [0,44; 0,61; 1,26; 2,71]

43 121° 3′, 200° 36′, 15° 12′ 58″. [2,11; 3,50; 0,27]

Trasforma in gradi sessagesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.

44 $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{9}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$. [144°; 75°; 140°; 300°]

45 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$. [38° 11′ 50″; 120°; 324°; 270°]

46 4π, 4, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$. [720°; 229° 11′; 143° 14′ 22″; 450°]

47 $\frac{3}{8}\pi$, 3,405, $\frac{5}{16}\pi$, 2,807. [67° 30′; 195° 5′ 32″; 56° 15′; 160° 49′ 45″]

48 **COMPLETA** la seguente tabella inserendo la misura mancante.

Gradi sessagesimali	Radianti	Forma decimale
22° 30′	....	....
....	$\frac{3}{8}\pi$	....
....	....	12,5°
31° 12′	....	....
....	8	....
18° 1′ 2″	....	....
....	....	120,34°

49 Un angolo α misura 0,725 radianti. Trova la misura del suo supplementare in radianti e in gradi.
[138° 39′ ...

In un triangolo rettangolo trova le misure in gradi degli angoli acuti α e β utilizzando la condizione indicata.

50 $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ [α = 22° 30′, β = ...

51 $\alpha = \beta - 20°$ [α = 35°, β = ...

52 α supera il doppio di β di 15°. [α = 65°, β = ...

53 In un triangolo isoscele ciascun angolo alla base misura 27°. Trova la misura in radianti dell'angolo al vertice.

54 Un angolo di un triangolo misura 32°, un secondo angolo è $\frac{2}{3}\pi$ radianti. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e in radianti.

55 Un triangolo ha un angolo doppio di un altro e il terzo angolo misura 24°. Trova la misura in radianti dei tre angoli del triangolo. [0,42; ...

56 Un triangolo ha gli angoli α, β, γ tali che $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ e $\beta = \gamma$. Trova la misura in radianti degli angoli α, β, γ.
$\left[\alpha = \frac{\pi}{7}; \beta = \gamma = \ldots\right.$

rova la misura, in gradi o in radianti, di due angoli supplementari α e β, utilizzando la condizione indicata.

57 $\alpha - 3\beta = 27°$ [$\alpha = 141° 45'$, $\beta = 38° 15'$]

58 $\beta - 2\alpha = 80°$ [$\alpha = 33° 20'$, $\beta = 146° 40'$]

59 $\alpha = \beta + \frac{\pi}{3}$ $\left[\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{\pi}{3}\right]$

60 Calcola la misura, in gradi e in radianti, di un angolo al centro di una circonferenza il cui raggio è uguale a 5 cm e che sottende un arco lungo 23 cm. [263° 33′ 38″; 4,6]

61 Calcola la lunghezza di un arco di circonferenza, con il raggio lungo 7 cm, che sottende un angolo uguale a 4,2 radianti. [29,4 cm]

62 Due archi l_1 e l_2 di due circonferenze, che hanno i raggi r_1 e r_2 rispettivamente uguali a 2 cm e 3,5 cm, sottendono lo stesso angolo. Trova la misura di l_2, sapendo che l_1 misura 4,5 cm. [7,88 cm]

63 Trova l'area di un settore circolare individuato da un arco lungo 22 cm di una circonferenza che ha il raggio lungo 5,2 cm e determina la misura in gradi dell'angolo sotteso dall'arco. [57,2 cm^2; 242° 21′ 40″]

64 Due settori circolari appartengono allo stesso cerchio e hanno area uguale a 12 cm^2 e 15,4 cm^2. Trova le lunghezze degli archi da essi determinati, sapendo che il primo sottende un angolo di 1,5 radianti. [6 cm; 7,7 cm]

65 **VERO O FALSO?**

a) Se $\alpha = \frac{9}{4}\pi$, allora $\alpha = 45°$. V F

b) Se $\alpha = 300°$, allora $\alpha = \frac{5}{3}\pi$. V F

c) La misura l di un arco di circonferenza di raggio r che corrisponde a un angolo al centro di α radianti è $l = \frac{1}{2}\alpha r$. V F

d) L'arco l di una circonferenza di raggio 5 cm, che sottende un angolo $\alpha = 32°$, è lungo $l = 32 \cdot 5 = 160$ cm. V F

Dai gradi centesimali ai gradi sessagesimali

66 **ESERCIZIO GUIDA**

L'ampiezza di un angolo α in *gradi centesimali* è $\alpha_c = 135{,}48$ grad. Determiniamo la sua ampiezza $\alpha°$ in *gradi sessagesimali*.

Il grado centesimale è definito come la centesima parte dell'angolo retto $\widehat{R}$, quindi la misura di $\widehat{R}$ è di 100 grad.
Per passare dal sistema centesimale a quello sessagesimale o viceversa scriviamo la proporzione:

$$\alpha_c : R_c = \alpha° : 90°.$$

Sostituiamo i valori noti:

$$135{,}48 : 100 = \alpha° : 90, \text{ da cui}$$

$$\alpha° = 135{,}48 \cdot \frac{90}{100} = 135{,}48 \cdot \frac{9}{10} = 121{,}932°.$$

Trasformiamo il risultato in gradi, primi e secondi, e otteniamo:

$$121{,}932° = 121° 55' 55{,}2''.$$

In generale, data la misura di un angolo in gradi centesimali, per trasformarla in gradi sessagesimali basta moltiplicare la misura per la frazione $\frac{9}{10}$.

Trasforma in gradi sessagesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi centesimali.

67 $\alpha_c = 50$ grad [$\alpha° = 45°$]

68 $\alpha_c = 90$ grad [$\alpha° = 81°$]

69 $\alpha_c = 45$ grad [$\alpha° = 40°\,30'$]

70 $\alpha_c = 60$ grad [$\alpha° = 54°$]

71 $\alpha_c = 180$ grad [$\alpha° = 162°$]

Trasforma in gradi centesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi sessagesimali.

72 $\alpha° = 108°$ [$\alpha_c = 120$ grad]

73 $\alpha° = 218°\,51'\,43{,}2''$ [$\alpha_c = 243{,}18$ grad]

74 $\alpha° = 30°\,15'\,28{,}8''$ [$\alpha_c = 33{,}62$ grad]

75 $\alpha° = 59°\,08'\,52{,}8''$ [$\alpha_c = 65{,}72$ grad]

76 $\alpha° = 75°\,07'\,22{,}8''$ [$\alpha_c = 83{,}47$ grad]

Gli angoli orientati

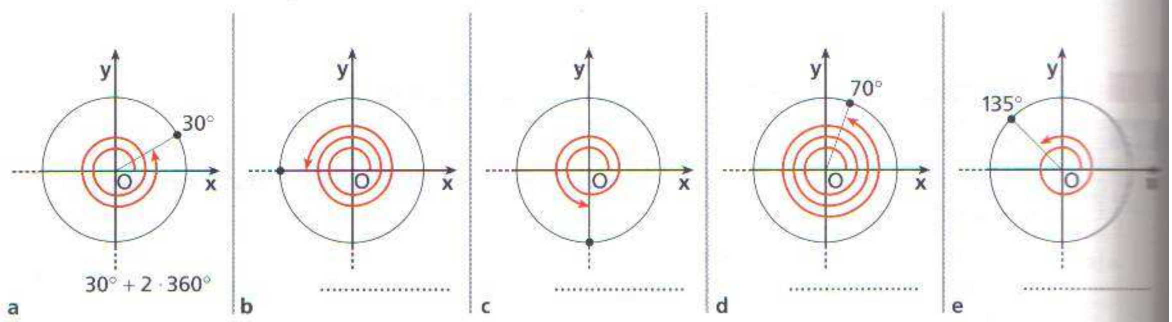
77 Disegna i seguenti angoli orientati facendo riferimento alla circonferenza goniometrica. L'angolo $\widehat{R}$ rappresenta l'angolo retto.

a) $+\widehat{R}$; $\quad -2\widehat{R}$; $\quad -\frac{1}{2}\widehat{R}$. $\qquad$ b) $+3\widehat{R}$; $\quad +\frac{3}{2}\widehat{R}$; $\quad -\frac{5}{2}\widehat{R}$.

78 Disegna i seguenti angoli, facendo riferimento alla circonferenza goniometrica.

390°; 765°; −420°; 450°; 1200°.

79 Scrivi in forma sintetica gli angoli rappresentati in figura.



Disegna alcuni degli angoli corrispondenti a ogni scrittura sintetica.

80 $k360°$; $k180°$; $k90°$; $k45°$.

81 $60° + k360°$; $\quad 45° + k180°$; $\quad 300° + k60°$.

Disegna sul cerchio goniometrico i seguenti angoli, misurati in radianti.

82 $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{11}{4}\pi$; $\frac{\pi}{8}$.

83 $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{17}{6}\pi$.

Disegna alcuni degli angoli corrispondenti a ogni scrittura sintetica.

84 $2k\pi$; $k\pi$; $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

85 $\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{4}$.

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

Teoria a pag. 553

224 Determina il seno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del seno degli angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; 0; -1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

225 Determina il coseno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del coseno di angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; 0; \frac{1}{2}\right]$

226 Determina la tangente dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza della tangente degli angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[-\sqrt{3}; -1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \text{non esiste}; -\sqrt{3}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

227 $4\,\text{sen}\,30° - \sec 60° + \sqrt{2}\,\text{cosec}\,45° + \cos 90° - 3\sec 0° + \text{cotg}\,45°$ $[0]$

228 $4\cos 0 - 2\sec\frac{\pi}{3} + 2\,\text{cosec}\frac{\pi}{4} - 4\,\text{sen}\frac{\pi}{4} + \text{cotg}\frac{\pi}{2}$ $[0]$

229 $3\,\text{tg}\,0° + 4\cos 30°\,\text{sen}\,60° - \sqrt{2}\cos 45° - 6\,\text{sen}\,90°$ $[-4]$

230 $\cos 0° + \text{sen}\,90° - 3\cos 180° + 5\,\text{sen}^2 270° - \text{sen}\,180° + 7\cos 270°$ $[10]$

231 $\sqrt{3}\cos 30° - \sqrt{3}\sec 60° - \text{sen}\,45° + \cos 60°\,\text{cosec}\,45° - 8\,\text{sen}^2\,30°$ $\left[-\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right]$

232 $\text{cotg}\frac{\pi}{2} - 3\sec\frac{\pi}{4} + \text{cosec}\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{6} - 8\,\text{cotg}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $[-3\sqrt{2}]$

233 $\frac{1}{2}\sec 45° - \cos 45° - 2\cos^2 30° + \sqrt{3}\,\text{cosec}\,60° - 3\,\text{tg}\,30° + 3\,\text{cotg}\,60°$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

234 $\frac{1}{3}\cos 0° + \sqrt{3}\,\text{sen}\,60° + 4\cos 90° - \frac{\sqrt{2}}{3}\cos 45° - 2\cos 60° - \frac{3}{2}\text{sen}\,90°$ $[-1]$

235 $\frac{3}{2}\text{cotg}\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{3} + \frac{3}{5}\text{cosec}\frac{\pi}{6} - \frac{3}{4}\sec\frac{\pi}{4}\,\text{cosec}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{cosec}\frac{\pi}{2}$ $\left[-\frac{13}{10}\right]$

236 $\frac{1}{2}\text{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sec\frac{\pi}{4} + \text{cosec}\frac{\pi}{4}\right) + 3\,\text{cotg}\frac{\pi}{3}\,\text{tg}\frac{\pi}{6} + \text{cosec}\frac{\pi}{6}$ $[6]$

237 $\dfrac{\left(2\,\text{sen}\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{\text{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\pi - \text{sen}\frac{3\pi}{2}} - \left(2\,\text{sen}\frac{\pi}{6} + \text{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2$ $\left[\frac{-7 + 2\sqrt{6}}{3}\right]$

238 $\left(2\cos\frac{\pi}{6} - 4\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 + 16\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\frac{\pi}{2}$ $[10 + 4\sqrt{2}]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni a coefficienti letterali.

239 $2a\,\text{sen}\frac{\pi}{6} - b\sqrt{2}\,\text{cosec}\frac{\pi}{4} + a\cos\frac{\pi}{2} + b\,\text{cotg}\frac{\pi}{4}$ $[a - b]$

240 $a\,\text{sen}\,90° + 2b\cos 180° - 3a\,\text{sen}\,270° + b\cos 0°$ $[4a - b]$

241 $2x\cos 60° - 2y \operatorname{sen} 60° + x \sec 60° + y \operatorname{tg} 60°$ $[3x]$

242 $\left(a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - b\cos\pi\right)\left(2a\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - b\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}\right) + b^2\sec\frac{\pi}{3}$ $[a^2 + b^2]$

243 $x\operatorname{tg}0 + \left(x\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} + y\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2 - 3y^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} - x\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi$ $[3x^2 + 6xy]$

244 $a\sec\frac{\pi}{3} + b^2\sqrt{3}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} + 5a\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - b^2\cos 0 - b^2\operatorname{cosec}\frac{3}{2}\pi$ $[3b^2 - 3a]$

245 $\dfrac{a^2\operatorname{tg}45° + ab\operatorname{cosec}30° + b^2\sec 0°}{a\operatorname{cosec}90° - b\operatorname{sen}270°}$ $[a + b]$

246 $\dfrac{2x\operatorname{sen}30°}{x\cos 0° + 2y\operatorname{sen}30°} + \dfrac{y\operatorname{sen}90°}{2y\sqrt{3}\cos 30° + 2y\operatorname{sen}270° + x} + \cos 60°$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

247 $\dfrac{a\cdot\operatorname{sen}90° - b\cdot\cos 0° + (a+b)\cdot\operatorname{tg}45° - 2a + 1}{a^2\cdot\operatorname{tg}45° - 2ab\cdot\cos 180° + b^2\cdot\operatorname{sen}90° - (a+b)^2 + 1}$ $[1]$

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

▶ Teoria a pag. 555

COMPLETA le seguenti tabelle.

248

x	$y = \operatorname{arcsen} x$	$\operatorname{sen} y$
0		
1		
	$\frac{\pi}{6}$	
		$-\frac{1}{2}$
		-1

250

x	$y = \operatorname{arctg} x$	$\operatorname{tg} y$
		0
	$\frac{\pi}{3}$	
-1		
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
		$-\sqrt{3}$

249

x	$y = \arccos x$	$\cos y$
	$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	π	
0		

251

x	$y = \operatorname{arccotg} x$	$\operatorname{cotg} y$
	$\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{3}$		
		-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
	$\frac{5}{6}\pi$	

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

252 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{3}\right]$

253 $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

254 $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

255 $\operatorname{arcsen}1 + \operatorname{arctg}(-1)$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

256 $\operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

257 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

258 $\pi - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\frac{1}{2}$ $\left[\frac{7}{4}\pi\right]$

259 $\pi - \left[4\operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{8}{3}\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

260 $\operatorname{arcsen} x = \pi$ [impossibile]

261 $4\operatorname{arctg} x - \pi = 0$ $[1]$

262 $9(\arccos x)^2 = \pi^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

263 $\arccos\frac{1}{2} = \operatorname{arcsen} x$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

264 $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

265 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

- Si tratta di una funzione composta; calcoliamo il valore della funzione più «interna», arcsen $\left(-\frac{1}{2}\right)$, tenendo conto che il codominio dell'arcoseno è $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Pertanto $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

- Calcoliamo ora il valore della funzione «esterna»:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

266 $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} 1)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

267 $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ $[\sqrt{3}]$

268 $\cos[\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

269 $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

270 $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

271 $\operatorname{cotg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

272 $\operatorname{sen}(\operatorname{arccotg}\sqrt{3})$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

273 $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

274 $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$ $[-\sqrt{3}]$

275 $\cos[\operatorname{arctg}(-1)]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

276 $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

277 $\operatorname{sen}[\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

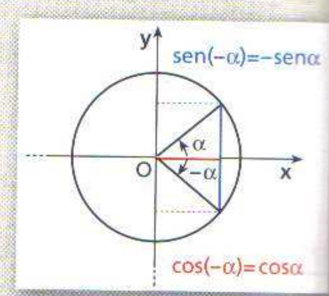
367 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\mathbf{sen(-\alpha) + 2\cos(-\alpha) + sec(-\alpha)\, cotg(-\alpha)\, sen\,\alpha + sen\,\alpha.}$$

Trasformiamo prima di tutto le funzioni di $-\alpha$ in funzioni di α notando in figura che

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha;\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$



e quindi:

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha;\ \text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha.$$

L'espressione diventa:

$$-\text{sen}\,\alpha + 2\cos\alpha + \sec\alpha(-\text{cotg}\,\alpha)\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha.$$

Trasformiamo sec α e cotg α in funzione di sen α e cos α e semplifichiamo:

$$-\text{sen}\,\alpha + 2\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha - 1.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

368 $-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}(-\alpha) + \cos\alpha\cos(-\alpha)$ [1]

369 $\text{tg}(-\alpha) - 2\cos(-\alpha) + 2\,\text{sen}(-\alpha)\,\text{cotg}(-\alpha)$ [$-\text{tg}\,\alpha$]

370 $\text{sen}(-\alpha) + \cos(-\alpha) + \sec(-\alpha) + 2\,\text{sen}\,\alpha - \sec\alpha + 3\cos\alpha$ [$\text{sen}\,\alpha + 4\cos\alpha$]

371 $\text{sen}^2(-\alpha) + \cos^2\alpha + \text{tg}\,\alpha\,\text{cotg}(-\alpha)$ [0]

372 $\dfrac{\cos(-\alpha) - \text{tg}(-\alpha)}{\cos^2\alpha + \text{sen}^2(-\alpha)} + \text{sen}^2(-\alpha) - \cos(-\alpha)$ [$\text{tg}\,\alpha + \text{sen}^2\alpha$]

373 $\sqrt{3}\cos(-30°) + \sqrt{3}\,\text{sen}(-60°) - \cos(-45°) - \cos(-60°)\,\text{cosec}(-45°) + 2\,\text{tg}(-45°)$ [-2]

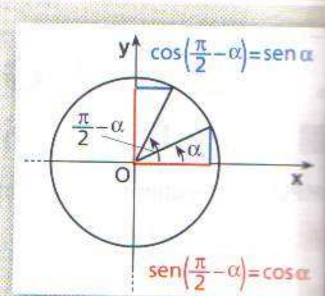
Angoli complementari $\left(\alpha \text{ e } \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

374 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\mathbf{sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\alpha + cosec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).}$$

Trasformiamo $\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ in funzione di $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:



$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\alpha + \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Trasformiamo le funzioni di $\frac{\pi}{2} - \alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni della figura.

L'espressione diventa: $\cos\alpha - \cos\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\,\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha.$

Semplifica le seguenti espressioni.

375 $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $[\cos\alpha]$

376 $2\cos(90°-\alpha)-3\operatorname{sen}(90°-\alpha)+2\cos\alpha-3\operatorname{sen}\alpha$ $[-\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha]$

377 $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-3\cos(-\alpha)\right]+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $[0]$

378 $[\cos(90°-\alpha)+\operatorname{sen}(90°-\alpha)]^2-\frac{2\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{1+\operatorname{cotg}^2(-\alpha)}$ $[1]$

Angoli che differiscono di un angolo retto $\left(\alpha \text{ e } \frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

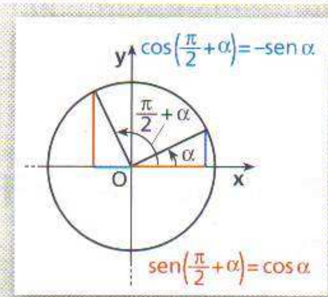
379 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\alpha+\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Trasformiamo $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ in funzione di $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$



Trasformiamo quindi le funzioni di $\frac{\pi}{2}+\alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni della figura.

L'espressione diventa: $-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=-1+\cos\alpha.$

Semplifica le seguenti espressioni.

380 $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $[\cos\alpha]$

381 $\cos(90°+\alpha)\operatorname{cotg}(90°+\alpha)(1+\operatorname{cotg}^2\alpha)(-\cos\alpha)$ $[-1]$

382 $\frac{\operatorname{sen}(90°+\alpha)+\cos(90°+\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\cos\alpha}$ $[0]$

383 $\operatorname{sen}(90°+\alpha)\cos(90°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)\operatorname{sen}(90°+\alpha)-\operatorname{sen}(-\alpha)$ $[\operatorname{sen}\alpha]$

Angoli supplementari (α e $\pi-\alpha$)

384 **ESERCIZIO GUIDA**

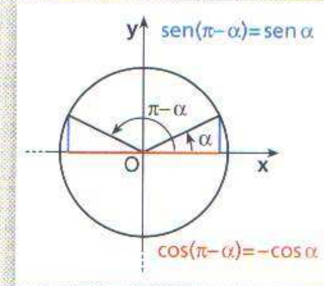
Semplifichiamo la seguente espressione:

$$3\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)-\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}(\pi-\alpha).$$

Trasformiamo $\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)$ in funzione del seno e del coseno:

$$3\cos\alpha + \cos(\pi-\alpha) - \operatorname{sen}\alpha + \frac{2\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}(\pi-\alpha).$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $\pi - \alpha$ in funzioni di α mediante le relazioni della figura. L'espressione diventa:



$$3\cos\alpha - \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha + 2\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= 2\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 2\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

385 $2[\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(180° - \alpha) - \cos\alpha\cos(180° - \alpha)] - 5\cos 180°$ [7]

386 $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}(\pi - \alpha)\operatorname{tg}\alpha$ [0]

387 $\cos\alpha\operatorname{cosec}(180° - \alpha) + \operatorname{sen}\alpha\sec(180° - \alpha) - \operatorname{cotg}(180° - \alpha) + \operatorname{tg}(180° - \alpha)$ [$2\operatorname{cotg}\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha$]

388 $\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \cos(\pi - \alpha) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(-\alpha)$ [0]

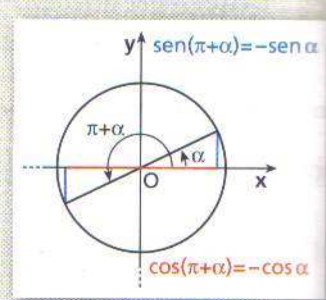
Angoli che differiscono di un angolo piatto (α e $2\pi + \alpha$)

389 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\operatorname{cosec}(\pi + \alpha) + 3\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cotg}(\pi + \alpha)\sec\alpha + 2\operatorname{sen}(\pi + \alpha).$$

Trasformiamo $\operatorname{cotg}(\pi + \alpha)$, $\operatorname{cosec}(\pi + \alpha)$ e $\sec\alpha$ in funzione del seno e del coseno:



$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)} + 3\operatorname{sen}\alpha + \frac{\cos(\pi+\alpha)}{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}(\pi+\alpha).$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $\pi + \alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni della figura. L'espressione diventa:

$$\frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha} + 3\operatorname{sen}\alpha + \frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} - 2\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

390 $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\pi + \alpha) + \cos(\pi + \alpha)\cos\alpha + 2$ [1]

391 $[\operatorname{tg}(180° + \alpha) + \operatorname{tg}\alpha]\operatorname{cosec}(180° + \alpha) - \sec(180° + \alpha)$ $\left[-\frac{1}{\cos\alpha}\right]$

392 $\operatorname{sen}\alpha\cos(\pi + \alpha) + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha[\operatorname{sen}(\pi + \alpha) + 1] + \cos(\pi + \alpha)$ [0]

393 $[\operatorname{sen}(180° - \alpha) - \cos(180° + \alpha)]^2 - 2\operatorname{sen}(-\alpha)\cos(180° + \alpha)$ [1]

Angoli la cui somma o differenza è $\frac{3}{2}\pi$

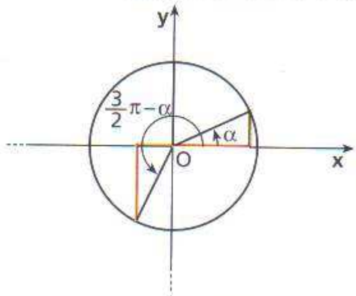
394 ESERCIZIO GUIDA

Semplifichiamo l'espressione:

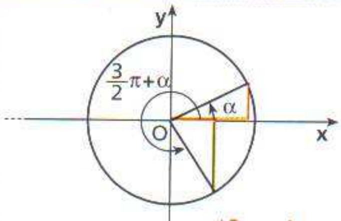
$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\cos\alpha + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right).$$

Trasformiamo le funzioni di $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni delle figure:

$$-\cos\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\alpha) + \operatorname{tg}\alpha = -\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = -1 + \operatorname{tg}\alpha.$$



$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$



$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$

Semplifica le seguenti espressioni.

395 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ [0]

396 $2\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ [-1]

397 $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \cos(-\alpha) + 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$ [$\operatorname{sen}\alpha$]

398 $\cos(270° + \alpha) + \operatorname{tg}(270° - \alpha) - \frac{\operatorname{sen}(270° - \alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}$ [$\operatorname{sen}\alpha$]

Angoli esplementari (α e $2\pi - \alpha$)

399 ESERCIZIO GUIDA

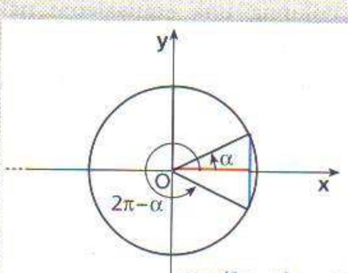
Semplifichiamo la seguente espressione:

$$3\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha)\sec\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha - 1.$$

Trasformiamo $\sec\alpha$ in funzione del coseno:

$$3\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha)\frac{1}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha - 1.$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $2\pi - \alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni della figura.
L'espressione diventa:



$\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$$-3\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\frac{1}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha - 1 = -3\operatorname{sen}\alpha + 1 + 2\operatorname{sen}\alpha - 1 = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

409 $\operatorname{cosec}(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)-\sec(-\alpha)$ $[\cos\alpha]$

410 $\cos(-\alpha)+\cos(360°-\alpha)+\cos(180°-\alpha)-\cos(180°+\alpha)$ $[2\cos\alpha]$

411 $\operatorname{tg}(-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(360°-\alpha)-\operatorname{tg}(180°-\alpha)$ $[-2\operatorname{tg}\alpha]$

412 $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)+2\cos(\pi+\alpha)+3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(-\alpha)$ $[-\operatorname{sen}\alpha]$

413 $\operatorname{sen}(90°+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha)+\operatorname{sen}(90°+\alpha)\operatorname{cotg}(90°-\alpha)-\cos(-\alpha)\operatorname{sen}(90°-\alpha)$ $[-\cos^2\alpha]$

414 $\operatorname{tg}(90°-\alpha)\operatorname{tg}\alpha-\frac{\operatorname{sen}(180°+\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}+\operatorname{cotg}(90°-\alpha)$ $[1]$

415 $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(-\alpha)+\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}(-\alpha)}$ $[-\operatorname{cotg}\alpha]$

416 $\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+[\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)]^2}-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2$ $[-1]$

417 $\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)+\cos(180°-\alpha)-\operatorname{tg}(180°+\alpha)}{\operatorname{tg}(180°-\alpha)-\cos(90°-\alpha)-\cos(-\alpha)}$ $[1]$

418 $\frac{-2\operatorname{sen}^2(180°-\alpha)+\cos^2(180°-\alpha)+2}{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\operatorname{sen}(90°-\alpha)+1}$ $[3(\operatorname{sen}\alpha+1)]$

419 $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\cos(3\pi+\alpha)+\operatorname{sen}(-\alpha)\operatorname{cotg}(\alpha-5\pi)$ $[-3\cos\alpha]$

420 $\frac{\cos(5\pi+\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)+\operatorname{sen}^2(3\pi+\alpha)}{\cos(\alpha-6\pi)\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}$ $\left[\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(1-\cos\alpha)}\right]$

421 $\operatorname{sen}(\alpha-2\pi)\operatorname{cotg}(-\alpha)+\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\cos(\alpha+5\pi)+\operatorname{sen}^2(6\pi-\alpha)$ $[1-\cos\alpha]$

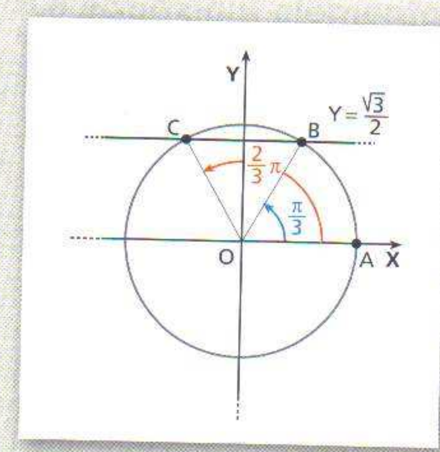
422 $\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+2\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)\cos(10\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{11}{2}\pi\right)}$ $[-\cos\alpha+2]$

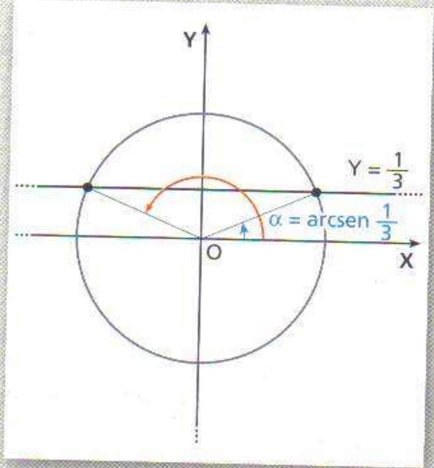
423 $\frac{\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(-\alpha)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{11}{2}\pi+\alpha\right)+\cos(3\pi+\alpha)}{-\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{sen}(\alpha+\pi)+\operatorname{sen}(7\pi-\alpha)}$ $[\cos\alpha]$

424 $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-2\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cos(2\pi-\alpha)+\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{\operatorname{cotg}(-\alpha)}$ $[-3\cos^2\alpha]$

425 $\cos(-\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$ $[\cos^2\alpha]$

426 $\frac{\cos(4\pi-\alpha)\cos(\alpha-6\pi)}{\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{cotg}(-\alpha)}{\cos(\alpha-3\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$





c) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per risolvere l'equazione poniamo $x - \frac{\pi}{6} = y$.
Otteniamo l'equazione goniometrica ausiliaria in y, che risolviamo nel modo consueto:

$$\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni sono $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $y = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.
Sostituiamo i valori trovati per y nell'equazione

$$x - \frac{\pi}{6} = y$$

e risolviamo le due equazioni in x:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

L'equazione assegnata ammette le soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

d) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$.

Procediamo come nel caso a). Tuttavia, notiamo che il seno non corrisponde ad angoli particolari, quindi esprimiamo le soluzioni mediante la funzione arcoseno:

$$x = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \operatorname{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi.$$

75 Scrivi le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $[0; 3\pi]$. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi\right]$

76 Scrivi le soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ in $[0; 2\pi]$. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni in $\mathbb{R}$.

77 $2 \operatorname{sen} x = \sqrt{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

78 $2 \operatorname{sen} x = -\sqrt{2}$ $\left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

79 $2 \operatorname{sen} x - 4 = 3$ [impossibile]

80 $2 \operatorname{sen} x + 2 = 3 \operatorname{sen} x + 4$ [impossibile]

81 $2 \operatorname{sen} 3x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{18}\pi + k\frac{2}{3}\pi\right]$

82 $2 \operatorname{sen}\frac{x}{3} + \sqrt{3} = 0$ $[x = -\pi + 6k\pi \vee x = 4\pi + 6k\pi]$

83 $2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$

84 $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$ $\left[x=\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$

85 $\operatorname{sen}x-1=0$ $\left[x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

86 $\operatorname{sen}x=\frac{1}{7}$ $\left[x=\operatorname{arcsen}\frac{1}{7}+2k\pi \vee x=\pi-\operatorname{arcsen}\frac{1}{7}+2k\pi\right]$

87 $\operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}$ $\left[x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right]$

88 $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}=1$ $\left[x=\frac{5}{3}\pi+4k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+4k\pi\right]$

89 $4\operatorname{sen}x=-1$ $\left[x=\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi \vee x=\pi-\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right]$

90 $2\operatorname{sen}5x-\sqrt{2}=0$ $\left[x=\frac{\pi}{20}+k\frac{2}{5}\pi \vee x=\frac{3}{20}\pi+k\frac{2}{5}\pi\right]$

91 $3\operatorname{sen}x-10=2(\operatorname{sen}x-1)$ [impossibile]

92 $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$ $\left[x=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}+2k\pi \vee x=\frac{5}{4}\pi-\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}+2k\pi\right]$

93 $\frac{3}{5}\operatorname{sen}x-\frac{4}{3}=-\frac{2}{5}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$ [impossibile]

94 $2(\operatorname{sen}2x+3)-1=3(1-\operatorname{sen}2x)+2$ $\left[x=k\frac{\pi}{2}\right]$

95 $4\operatorname{sen}(x-15°)=3\operatorname{sen}(x-15°)+2[13+3\operatorname{sen}(x-15°)]$ [impossibile]

96 $8\operatorname{sen}8x=8$ $\left[x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}\right]$

97 $2\cos 60°\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}30°=\operatorname{tg}180°$ $[x=30°+k360° \vee x=150°+k360°]$

98 $\operatorname{sen}x+3=2(\operatorname{sen}x+2)$ $\left[x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$

99 $2\operatorname{sen}x+\sqrt{3}=0$ $\left[x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right]$

100 $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{18}\right)+3=2\left[\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{18}\right)+2\right]$ $\left[x=\frac{14}{9}\pi+2k\pi\right]$

101 $(\operatorname{sen}3x-2)(\operatorname{sen}3x-3)=(\operatorname{sen}3x+2)(\operatorname{sen}3x+3)$ $\left[x=k\frac{\pi}{3}\right]$

102 $\left|\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=1$ $\left[x=\frac{2}{3}\pi+k\pi\right]$

103 $5-\operatorname{sen}(x+21°)=6-2\operatorname{sen}(x+21°)$ $[x=69°+k360°]$

104 $2\operatorname{sen}x-2\cos 45°=2(\sqrt{2}\operatorname{sen}60°-\operatorname{sen}x)$ $[x=75°+k360° \vee x=105°+k360°]$

105 $\operatorname{sen}(2x-10°)+3=3\operatorname{sen}(2x-10°)+4$ $[x=-10°+k180° \vee x=110°+k180°]$

106 $|2\operatorname{sen}3x|=1$ $\left[x=\pm\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\right]$

107 $3\operatorname{sen}x-1-\left[\frac{\operatorname{sen}x-2}{3}+\left(\operatorname{sen}x-\frac{\operatorname{sen}x-1}{3}\right)\right]=20$ [impossibile]

Le equazioni elementari del tipo $\cos x = a$

108 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti equazioni: a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; b) $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

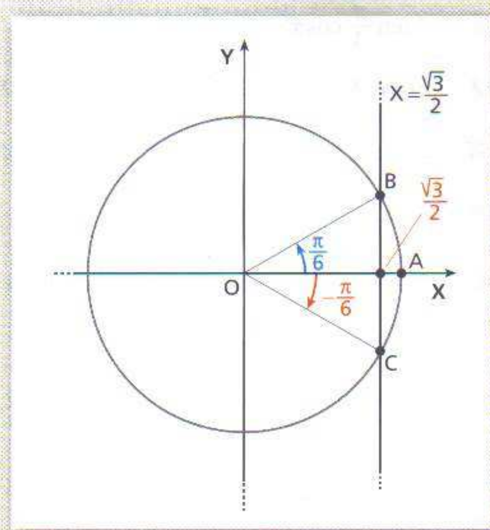
a) Risolviamo l'equazione rispetto a $\cos x$:

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sulla circonferenza goniometrica, cerchiamo i punti di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Una soluzione si ha per $x = \frac{\pi}{6}$, l'altra per $x = -\frac{\pi}{6}$. Tenendo conto che il periodo della funzione coseno è 2π, le soluzioni dell'equazione data, in forma sintetica, sono:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$



b) $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poniamo $5x = y$, ottenendo l'equazione:

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Con il procedimento esaminato nel punto *a*, troviamo le sue soluzioni:

$$y = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Sostituiamo i valori determinati in $5x = y$ e risolviamo le due equazioni in x ottenute:

$$5x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi.$$

La soluzione in gradi è $x = \pm 9° + k72°$.

Risolvi le seguenti equazioni.

109 $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

110 $2\cos x = \sqrt{2}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

111 $3\cos x - 5 = 3$ [impossibile]

112 $2\cos 5x + \sqrt{2} = 0$ $[x = \pm 27° + k72°]$

113 $2\cos 6x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\right]$

114 $\cos x = 1$ $[x = 2k\pi]$

115 $8\cos x = 1$ $\left[x = \pm\arccos\frac{1}{8} + 2k\pi\right]$

116 $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ $\left[x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

117 $\cos x - 4 = 3\cos x + 8$ [impossibile]

118 $\cos\frac{x}{4} - 1 = 0$ $[x = 8k\pi]$

119 $\cos\left(\frac{\pi}{9} - x\right) = 0$ $\left[x = \frac{11}{18}\pi + k\pi\right]$

120 $\cos 3x = -1 - \cos 3x$ $\left[x = \pm\frac{2}{9}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi\right]$

121 $\cos 4x = \frac{1}{3}$ $\left[x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2}\right]$

122 $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} \pm \arccos\frac{1}{4} + 2k\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

137 $\text{tg}\, x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

138 $3\,\text{tg}\, x = \sqrt{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

139 $\text{tg}\, x - \sqrt{3} = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

140 $\text{tg}\, x = 2$ $[x = \text{arctg}\, 2 + k\pi]$

141 $\text{tg}\frac{x}{4} + 1 = 0$ $[x = -\pi - 4k\pi]$

142 $3\,\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{9}\right) - \sqrt{3} = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{18} + k\pi\right]$

143 $3\,\text{tg}\, x + 4 = \text{tg}\, x + 4$ $[x = k\pi]$

144 $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$ $\left[x = -\frac{5}{12}\pi + k\pi\right]$

145 $2\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\text{tg}\, x - \text{tg}\frac{\pi}{3} = \text{tg}\,\pi$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

146 $3\,\text{tg}\frac{x}{2} - 2 = 2\,\text{tg}\frac{x}{2} - 1$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

147 $\text{tg}\, 3x = 3$ $\left[x = \frac{1}{3}\text{arctg}3 + k\frac{\pi}{3}\right]$

148 $\text{cotg}\, 2x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right]$

149 $\text{tg}(110° - x) = 0$ $[x = 110° + k180°]$

150 $3\,\text{cotg}\, 3x = -\sqrt{3}$ $\left[x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}\right]$

151 $3\,\text{tg}\, 6x + \sqrt{3} = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{6}\right]$

152 $3\,\text{tg}\, 3x = -1 + 2\,\text{tg}\, 3x$ $\left[x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right]$

---

153 $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4=0$ $\left[x=-\frac{\pi}{3}+\text{arctg}(-4)+k\pi\right]$

154 $\left|\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{3}$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k\pi\right]$

155 $6 - 2\sqrt{3}\,\text{tg}(x + 100°) = 4[1 + \sqrt{3}\,\text{tg}(x + 100°)] + 8$ $[x = -130° + k180°]$

156 $\text{tg}(x - 12°) - 3 = 2\,\text{tg}(x - 12°) - 2$ $[x = -33° + k180°]$

157 $2(\text{tg}\, x + 1) + 3(1 - \text{tg}\, x) = -2(\text{tg}\, x - 1) + 4$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

158 $2(\text{tg}\, 3x - 1) + \sqrt{3} = 1 - [2\,\text{tg}\, 3x + 3(1 - \text{tg}\, 3x)]$ $\left[x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}\right]$

Particolari equazioni goniometriche elementari

159 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $\text{sen}\, 4x = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

b) $\text{sen}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = -\text{sen}\left(2x - \frac{3}{4}\pi\right)$;

c) $\cos 6x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

d) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x$;

e) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\,\frac{5x}{6}$;

f) $\text{tg}\left(3x+\frac{2}{5}\pi\right)=-\text{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

a) $\text{sen}\, 4x = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Poiché

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$$

e nell'equazione data è

$$\alpha = 4x \quad \text{e} \quad \alpha' = 2x - \frac{\pi}{3},$$